16. Knobelaufgabe #6

Harry Hacker hat mit dem folgenden Ausdruck den „International Obfuscated F# Code Contest“ gewonnen.

$$\textbf{\textit{let}}\ a = \textbf{\textit{fun}}\ b\ c \to b\ (b\ c)\ \textbf{\textit{in}}\ a\ a\ a\ a\ (\textbf{\textit{fun}}\ d \to d * d * d)\ 9$$

Zu welcher natürlichen Zahl wertet der Ausdruck aus?

16. Motivation

- Wieviele Möglichkeiten gibt es, n verschiedene Objekte in einer Reihe zu arrangieren?
  - Für die erste Position gibt es n Möglichkeiten,
  - für die zweite Position gibt es $n - 1$ Möglichkeiten,
  - ...
  - für die vorletzte Position gibt es 2 Möglichkeiten,
  - für die letzte Position gibt es 1 Möglichkeit.
- Insgesamt gibt es $1 * 2 * \cdots * (n - 1) * n$ Möglichkeiten.
- Diese Zahl heißt auch n *Fakultät*, notiert $n!$.

16. Motivation

Wie können wir die Fakultätsfunktion in Mini–F# programmieren?

Ein erster Versuch:

```
let factorial (n : Nat) : Nat =
  if n = 0 then 1
  else    if n = 1 then 1
     else if n = 2 then 1 * 2
     else if n = 3 then 1 * 2 * 3
     else ...
```

☞ Der Wert von 0 Fakultät ist 1, da das leere Produkt von Zahlen vereinbarungsgemäß 1 ist.

16. Motivation

Beobachtung: in jedem der Fälle $n > 0$ ist der letzte Faktor die Zahl n selbst.

```
let factorial (n : Nat) : Nat =
  if n = 0 then 1
  else    if n = 1 then n
     else if n = 2 then 1 * n
     else if n = 3 then 1 * 2 * n
     else ...
```

16. Motivation

☞ Der Faktor n kann aus den Zweigen der Alternativen „herausgezogen“ werden.

let *factorial* $(n : Nat) : Nat =$
  if $n = 0$ ***then*** 1
  else $($ ***if*** $n = 1$ ***then*** 1
    else if $n = 2$ ***then*** 1
    else if $n = 3$ ***then*** $1 * 2$
    else $\ldots) * n$

16. Motivation

Der Ausdruck in Klammern sieht dem ursprünglichen Funktionsrumpf sehr ähnlich. Die Konstanten können in Übereinstimmung gebracht bringen, indem wir links und rechts jeweils 1 subtrahieren.

let *factorial* $(n : Nat) : Nat =$
  if $n = 0$ ***then*** 1
  else $($ ***if*** $n \dot{-} 1 = 0$ ***then*** 1
    else if $n \dot{-} 1 = 1$ ***then*** 1
    else if $n \dot{-} 1 = 2$ ***then*** $1 * 2$
    else $\ldots) * n$

☞ Der Ausdruck in Klammern ist gleich dem Aufruf *factorial* $(n - 1)$.

16. Motivation

Erlauben wir bei der Definition einer Funktion den Rückgriff auf die definierte Funktion selbst (!), so erhalten wir:

let rec *factorial* $(n : Nat) : Nat =$
  if $n = 0$ ***then*** 1 ***else*** *factorial* $(n \dot{-} 1) * n$

☞ Greift man bei der Definition auf das definierte Objekt selbst zurück, spricht man von einer *rekursiven* Definition.

☞ Rekursive Definitionen werden mit dem Schlüsselwort ***rec*** gekennzeichnet. (Warum?)

16. Abstrakte Syntax

$d ::= \cdots$	*Deklarationen:*
$\mid$ ***let rec*** $f\ (x_1 : t_1) : t_2 = e$	rekursive Funktionsdefinition

☞ ***let rec*** $f\ (x) = e$ definiert genau wie ***let*** $f\ (x) = e$ eine Funktion, nur dass in e zusätzlich der Bezeichner f sichtbar ist.

16. Statische Semantik

Typregeln:

$$\frac{\Sigma, \{ f \mapsto t_1 \to t_2, x_1 \mapsto t_1 \} \vdash e_2 : t_2}{\Sigma \vdash (\textbf{\textit{let rec}}\ f\ (x_1 : t_1) : t_2 = e_2) : \{ f \mapsto t_1 \to t_2 \}}$$

Zum Vergleich die Regel für nicht-rekursive Definitionen:

$$\frac{\Sigma, \{ x_1 \mapsto t_1 \} \vdash e_2 : t_2}{\Sigma \vdash (\textbf{\textit{let}}\ f\ (x_1 : t_1) : t_2 = e_2) : \{ f \mapsto t_1 \to t_2 \}}$$

16. Dynamische Semantik

Der Bereich der Werte wird um rekursive Funktionsabschlüsse erweitert.

$\nu ::= \cdots$	*Werte:*
$\mid \langle \delta, f, x, e \rangle$	rekursiver Funktionsabschluss

Auswertungsregeln:

$$\frac{}{\delta \vdash (\textbf{\textit{let rec}}\ f\ x = e) \Downarrow \{f \mapsto \langle \delta, f, x, e \rangle\}}$$

$$\frac{\delta \vdash e \Downarrow \nu \qquad \delta \vdash e_1 \Downarrow \nu_1 \qquad \delta', \{f \mapsto \nu, x_1 \mapsto \nu_1\} \vdash e' \Downarrow \nu'}{\delta \vdash e\ e_1 \Downarrow \nu'}$$

mit $\nu = \langle \delta', f, x_1, e' \rangle$

☞ f wird an den rekursiven Funktionsabschluss gebunden, in dem f selbst aufgeführt wird. (Aus der Rekursion wird ein zyklisches Geflecht.)

16. Demo

Die Fakultät wächst sehr schnell, wie die folgenden Aufrufe zeigen.

```
Mini⟩ factorial 10
3.628.800
Mini⟩ factorial 100
93.326.215.443.944.152.681.699.238.856.266.700.490.715.968.264.
381.621.468.592.963.895.217.599.993.229.915.608.941.463.976.156.
518.286.253.697.920.827.223.758.251.185.210.916.864.000.000.000.
000.000.000.000.000
```

☞ Die Zahl der Atome im sichtbaren Weltall wird auf ungefähr 10^{79} geschätzt; *factorial* 100 mit seinen 158 Stellen übersteigt diese Zahl um ein Vielfaches.

17. Vertiefung

- Der Schritt von den nicht-rekursiven zu den rekursiven Funktionen ist ein gewaltiger.

  Mini–F# ist berechnungsuniversell.

  Mit Mini–F# können wir die prinzipiellen Möglichkeiten eines Rechners ausnutzen.
- Mehr dazu später in der Theoretischen Abteilung der Informatik.
- Wir wenden uns an dieser Stelle den vergnüglichen Dingen zu, der Programmierung. Im folgenden:
  - Potenzfunktion,
  - Quadratwurzel,
  - ein Ratespiel,
  - und mehr.

17. Vertiefung

```
let rec factorial (n : Nat) : Nat =
  if n = 0 then 1
           else factorial (n ∸ 1) * n
```

Die Definition basiert auf der Tatsache, dass eine natürliche Zahl entweder 0 oder größer als 0 ist.

Problemlösungsbrille:

- *Rekursionsbasis*: die Lösung muss unmittelbar angeben werden.
- *Rekursionsschritt*: rekursiv wird eine Lösung für $n \dot{-} 1$ bestimmt, dann wird die Teillösung zu einer Gesamtlösung für n erweitert.

17. Potenzfunktion

Wenden wir das Problemlösungsschema auf die Potenzfunktion x^n an.

let rec *power* $(x : Nat, n : Nat) : Nat =$
  if $n = 0$ ***then*** $\ldots$
    else $\ldots$ *power* $(x, n \dot{-} 1) \ldots$

☞Wir rekurrieren über n, nicht über x. (Warum?)

17. Potenzfunktion

- *Rekursionsbasis*: $x^0 = 1$.

```
let rec power (x : Nat, n : Nat) : Nat =
  if n = 0 then 1
           else ... power (x, n ∸ 1) ...
```

- *Rekursionsschritt*: $x^n = x^{n-1} * x$.

```
let rec power (x : Nat, n : Nat) : Nat =
  if n = 0 then 1
           else power (x, n ∸ 1) * x
```

17. Multiplikation

Die Potenzfunktion wird auf wiederholte Multiplikation zurückgeführt. Ebenso lässt sich die Multiplikation auf wiederholte Addition zurückführen.

$$\begin{array}{l}\textbf{\textit{let rec}}\ \mathit{mul}\ (m : \mathit{Nat}, n : \mathit{Nat}) : \mathit{Nat} = \\ \quad \textbf{\textit{if}}\ m = 0\ \textbf{\textit{then}} \ldots \\ \qquad\qquad \textbf{\textit{else}}\ \ldots \mathit{mul}\ (m \dot{-} 1, n) \ldots\end{array}$$

17. Multiplikation

- *Rekursionsbasis*: $0 * n = 0$.

$$\begin{array}{l}\textbf{\textit{let rec}}\ \mathit{mul}\ (m : \mathit{Nat}, n : \mathit{Nat}) : \mathit{Nat} = \\ \quad \textbf{\textit{if}}\ m = 0\ \textbf{\textit{then}}\ 0 \\ \qquad\qquad \textbf{\textit{else}}\ \ \ldots \mathit{mul}\ (m \dot{-} 1, n) \ldots\end{array}$$

- *Rekursionsschritt*: $m * n = (m - 1) * n + n$.

$$\begin{array}{l}\textbf{\textit{let rec}}\ \mathit{mul}\ (m : \mathit{Nat}, n : \mathit{Nat}) : \mathit{Nat} = \\ \quad \textbf{\textit{if}}\ m = 0\ \textbf{\textit{then}}\ 0 \\ \qquad\qquad \textbf{\textit{else}}\ \ \mathit{mul}\ (m \dot{-} 1, n) + n\end{array}$$

17. Addition

Und die Addition lässt sich auf die Nachfolgerfunktion zurückführen.

$$\begin{array}{l}\textbf{\textit{let rec}}\ \mathit{add}\ (m : \mathit{Nat}, n : \mathit{Nat}) : \mathit{Nat} = \\ \quad \textbf{\textit{if}}\ m = 0\ \textbf{\textit{then}} \ldots \\ \qquad\qquad \textbf{\textit{else}}\ \ldots \mathit{add}\ (m \dot{-} 1, n) \ldots\end{array}$$

17. Addition

- *Rekursionsbasis*: $0 + n = n$.

```
let rec add (m : Nat, n : Nat) : Nat =
  if m = 0 then n
           else  ... add (m ∸ 1, n) ...
```

- *Rekursionsschritt*: $m + n = (m - 1) + n + 1$.

```
let rec add (m : Nat, n : Nat) : Nat =
  if m = 0 then n
           else  add (m ∸ 1, n) + 1
```

17. Zwischenfazit

Die Beispielprogramme zeigen, dass wir theoretisch mit einigen wenigen vordefinierten Funktionen auskommen:

- der Zahl 0,
- dem Test „gleich 0“,
- der Nachfolgerfunktion und
- der Vorgängerfunktion.

☞ Minimalistische Sprachen sind von Vorteil, wenn man Aussagen über *alle* Programme einer Sprache machen möchte. Mehr zu diesem Thema später aus der Abteilung der Theoretischen Informatik.

17. Peano Entwurfsmuster

Haben wir die Aufgabe eine Funktion $f : Nat \to t$ zu erstellen, dann sieht ein erster Entwurf folgendermaßen aus.

let rec $f\ (n : Nat) : t =$	*Peano Entwurfsmuster:*
if $n = 0$ ***then*** $\ldots$	*Rekursionsbasis*
else $\ldots f\ (n \dot{-} 1) \ldots$	*Rekursionsschritt*

Die Ellipsen müssen mit Leben gefüllt werden:

- *Rekursionsbasis*: ein Ausdruck des Typs t.
- *Rekursionsschritt*: ein Ausdruck, der die Teillösung $f\ (n \dot{-} 1)$ vom Typ t zu einer Gesamtlösung vom Typ t erweitert.

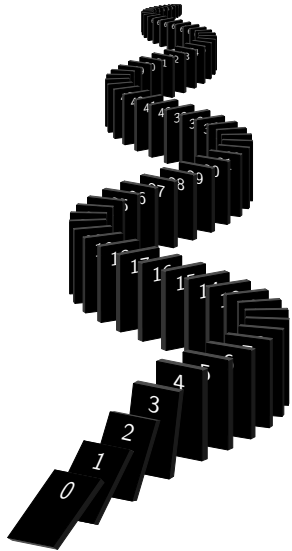
17. Giuseppe Peano (1858–1932)

Der italienische Mathematiker und Logiker Giuseppe Peano entwickelte, an die Algebra der Logik von Boole, Jevons, Schröder, Porezki anknüpfend, die mathematische Logik weiter.

Von Peano stammt ein bekanntes und noch heute verwendetes *Axiomensystem* für die natürlichen Zahlen.

- 0 ist eine natürliche Zahl.
- Für alle n gilt, dass, wenn n eine natürliche Zahl ist, auch die auf n folgende Zahl eine natürliche Zahl ist.
- Wenn auf zwei Zahlen dieselbe Zahl folgt, sind sie identisch.
- 0 kann nicht auf eine natürliche Zahl folgen.
- Das Induktionsaxiom: Wenn 0 eine Eigenschaft hat, und wenn jede auf eine natürliche Zahl folgende Zahl die Eigenschaft besitzt, sofern die Zahl selbst die Eigenschaft hat, dann haben alle natürlichen Zahlen die betreffende Eigenschaft.

17. Induktion: das Domino Prinzip



17. Quadratwurzel

Aufgabe: square-root n soll die Quadratwurzel der Zahl *n* bestimmen. Genauer: gesucht wird die *größte* Zahl *r*, so dass $r * r \leqslant n$.

```
Mini⟩ square-root 4711
68
Mini⟩ square 68
4624
Mini⟩ square 69
4761
```

In eine Formel gegossen suchen wir $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

17. Quadratwurzel

Mit dem Peano Entwurfsmuster erhalten wir:

let rec *square-root* $(n : Nat) : Nat =$
  if $n = 0$ ***then*** $\ldots$
    else $\ldots$ *square-root* $(n \dot{-} 1) \ldots$

17. Quadratwurzel

- *Rekursionsbasis*: $\lfloor\sqrt{0}\rfloor = 0$.

```
let rec square-root (n : Nat) : Nat =
  if n = 0 then 0
           else ... square-root (n ∸ 1) ...
```

- *Rekursionsschritt*: Wie lässt sich aus $\lfloor\sqrt{n-1}\rfloor$ eine Lösung für $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ herleiten? Es gilt: $0 \leq \lfloor\sqrt{n}\rfloor - \lfloor\sqrt{n-1}\rfloor \leq 1$ wenn $n > 0$. Also,
  - $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ ist entweder identisch zu $\lfloor\sqrt{n-1}\rfloor$ oder
  - $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ ist um eins größer.

  Wir testen einfach, ob wir mit der Erhöhung über das Ziel hinausschießen.

```
let rec square-root (n : Nat) : Nat =
  if n = 0 then 0
           else let r = square-root (n ∸ 1)
                in  if n < square (r + 1) then r else r + 1
```

17. Peano Entwurfsmuster — programmiert

Was ist im Rekursionsschritt zu tun?

- *Rekursionsschritt*: ein Ausdruck, der die Teillösung $f\ (n \dot{-} 1)$ vom Typ t zu einer Gesamtlösung vom Typ t erweitert.

Einsicht: die Erweiterung der Teillösung zu einer Gesamtlösung ist der Natur nach eine Funktion.

Geben wir also den fehlenden Programmteilen im Schema einen Namen.

$$
\begin{array}{l}
\textbf{\textit{let rec}}\ f\ (n : Nat) : Nat = \\
\quad \textbf{\textit{if}}\ n = 0\ \textbf{\textit{then}}\ zero \\
\qquad\qquad \textbf{\textit{else}}\ \ succ\ (f\ (n \dot{-} 1))
\end{array}
$$

17. Peano Entwurfsmuster — programmiert

Abstrahieren wir von *zero* und *succ*, erhalten wir eine *Implementierung* des Peano Entwurfsmusters.

$$
\begin{array}{l}
\textbf{\textit{let}}\ \textit{peano-pattern}\ (\textit{zero} : \textit{Nat}, \textit{succ} : \textit{Nat} \to \textit{Nat}) : \textit{Nat} \to \textit{Nat} = \\
\quad \textbf{\textit{let rec}}\ f\ (n : \textit{Nat}) : \textit{Nat} = \\
\qquad \textbf{\textit{if}}\ n = 0\ \textbf{\textit{then}}\ \textit{zero} \\
\qquad\qquad \textbf{\textit{else}}\ \ \textit{succ}\ (f\ (n \dot{-} 1)) \\
\quad \textbf{\textit{in}}\ \ f
\end{array}
$$

17. Peano Entwurfsmuster — programmiert

Mit Hilfe von *peano-pattern* können wir *power* usw. kürzer aufschreiben.

$$\begin{array}{ll} \textbf{let}\ \mathit{power}\ (x,\ n) & = (\mathit{peano\text{-}pattern}\ (1, \textbf{fun}\ s \to s * x))\ \ n \\ \textbf{let}\ \mathit{mul}\ \ \ (m, n) & = (\mathit{peano\text{-}pattern}\ (0, \textbf{fun}\ s \to s + n))\ m \\ \textbf{let}\ \mathit{add}\ \ \ (m, n) & = (\mathit{peano\text{-}pattern}\ (n, \textbf{fun}\ s \to s + 1))\ m \end{array}$$

☞ Man sieht sehr schön, wie jeweils die Teillösung s zu einer Gesamtlösung erweitert wird.

17. Peano Entwurfsmuster — programmiert

Ganz perfekt ist die Umsetzung des Entwurfsmusters noch nicht.

- Der Typ ist zu speziell:

  let *peano-pattern* $(zero : Nat, succ : Nat \to Nat) : Nat \to Nat =$

- Die Fakultätsfunktion und die Quadratwurzel lassen sich damit nicht definieren.