Teil II

Grundlagen

3. Quiz: endliche Abbildungen

$\Uparrow$ hmmm

$\xLeftarrow{\text{richtig}}$ *Aussage* $\xRightarrow{\text{falsch}}$

Die leere endliche Abbildung $\varnothing$ bildet alles auf sich selbst ab. $\xRightarrow{\text{falsch}}$

Für endliche Abbildungen gilt immer $\varphi_1, \varphi_2 = \varphi_2, \varphi_1$. $\xRightarrow{\text{falsch}}$

$\xLeftarrow{\text{richtig}}$ Für endliche Abbildungen gilt immer $\varnothing, \varphi = \varphi = \varphi, \varnothing$.

3. Quiz: endliche Abbildungen

$$\Uparrow \text{hmmm}$$

$$\text{richtig} \Longleftarrow \quad \textit{Aussage} \quad \Longrightarrow \text{falsch}$$

. . . .

Für $x \notin \mathit{dom}\ \varphi$ gilt $\varphi(x) = x$. $\xRightarrow{\text{falsch}}$

$\xLeftarrow{\text{richtig}}$ Für $x \notin \mathit{dom}\ \varphi$ ist $\varphi(x)$ nicht definiert.

3. Quiz: Ausdrücke und Werte

$\Uparrow$ hmmm

$\xLeftarrow{\text{richtig}}$ *Aussage* $\xRightarrow{\text{falsch}}$

. . . .

$\xLeftarrow{\text{richtig}}$ *true* ist ein Wert

$\xLeftarrow{\text{richtig}}$ *true* ist ein Ausdruck

$\xLeftarrow{\text{richtig}}$ *true* wertet zu *true* aus

3. Quiz: Ausdrücke und Werte

$\Uparrow$ hmmm

$\xLeftarrow{\text{richtig}}$ *Aussage* $\xRightarrow{\text{falsch}}$

. . . .

$\xLeftarrow{\text{richtig}}$ $(\textbf{\textit{if}}\ 47 > 11\ \textbf{\textit{then}}\ 1\ \textbf{\textit{else}}\ 0) + 9$ ist wohlgetypt

$\xLeftarrow{\text{richtig}}$ $(\textbf{\textit{if}}\ 47 > 11\ \textbf{\textit{then}}\ 1\ \textbf{\textit{else}}\ 0) + 9$ wertet zu 10 aus

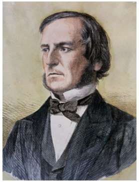
3. Knobelaufgabe #2

In einer dunklen Höhle leben Zwerge, die entweder eine weiße oder eine schwarze Mütze aufhaben. Einmal im Jahr dürfen sie die Höhle verlassen und bekommen eine Aufgabe gestellt. Lösen sie diese, sind sie frei. Misslingt die Lösung, müssen sie zurück in die Finsternis.

In diesem Jahr lautet die Aufgabe: Stellt euch nebeneinander so auf, dass die Zwerge mit einer weißen Mütze auf der linken Seite stehen und die mit schwarzer Mütze auf der rechten. Keiner der Zwerge kann die Farbe seiner eigenen Mütze sehen. Zudem dürfen die Zwerge weder miteinander reden noch sich auf sonstige Weise verständigen oder einander Hinweise geben, etwa mit der Hand oder den Augen. Auch Tricks wie die Verwendung von Spiegeln sind verboten.

Nicht verboten ist den Zwergen aber, ihren Verstand zu nutzen. Und in der Tat bekommen sie es auf Anhieb hin, sich nach der Farbe der Mützen getrennt aufzustellen. Wie haben Sie das bloß angestellt?

4. A tribute to George Boole (1815–1864)



Der englische Mathematiker George Boole entwickelte in seiner Schrift „The Mathematical Analysis of Logic"' von 1847 den ersten algebraischen Logikkalkül und begründete damit die moderne mathematische Logik.

Boole stellte die Wahrheitswerte durch die Zahlen 0 und 1 dar und drückte die logischen Operationen entsprechend durch arithmetische Operationen aus.

56 OF HYPOTHETICALS.

1st. Disjunctive Syllogism.

Either X is true, or Y is true (exclusive),	$x + y - 2\,xy = 1$
But X is true,	$x = 1$
Therefore Y is not true, .	$\therefore\ y = 0$
Either X is true, or Y is true (not exclusive),	$x + y - xy = 1$
But X is not true,	$x = 0$
Therefore Y is true,	$\therefore\ y = 1$

4. A tribute to George Boole

- 0 und 1;
- falsch und wahr;
- false and true;
- f und t.

4. Einstellige Operationen

a	$g(a)$
f	f oder t
t	f oder t

	a	f	t
Falschheit	f	f	f
Identität	a	f	t
Negation	$\neg a$	t	f
Wahrheit	t	t	t

Systematik:

- das Argument wird ignoriert (konstante Funktion): 2 Operationen,
- das Argument wird nicht ignoriert: 2 Operationen.

4. Zweistellige Operationen

$g(a, b)$		b	
		f	t
	f	f oder t	f oder t
a	t	f oder t	f oder t

4. Zweistellige Operationen: Logikbrille

	a	f	f	t	t
	b	f	t	f	t
Falschheit	f	f	f	f	f
Konjunktion	$a \wedge b$	f	f	f	t
Nicht-Implikation	$\neg(a \rightarrow b)$	f	f	t	f
Projektion	a	f	f	t	t
Nicht-Umkehrimplikation	$\neg(a \leftarrow b)$	f	t	f	f
Projektion	b	f	t	f	t
Nicht-Äquivalenz	$\neg(a \leftrightarrow b)$	f	t	t	f
Disjunktion	$a \vee b$	f	t	t	t
Nicht-Disjunktion	$\neg(a \vee b)$	t	f	f	f
Äquivalenz	$a \leftrightarrow b$	t	f	f	t
Nicht-Projektion	$\neg b$	t	f	t	f
Umkehrimplikation	$a \leftarrow b$	t	f	t	t
Nicht-Projektion	$\neg a$	t	t	f	f
Implikation	$a \rightarrow b$	t	t	f	t
Nicht-Konjunktion	$\neg(a \wedge b)$	t	t	t	f
Wahrheit	t	t	t	t	t

4. Zweistellige Operationen: Ordnungsbrille

	a	f	f	t	t
	b	f	t	f	t
kleinste Element	f	f	f	f	f
Minimum	$a \downarrow b$	f	f	f	t
echt größer	$a > b$	f	f	t	f
	a	f	f	t	t
echt kleiner	$a < b$	f	t	f	f
	b	f	t	f	t
ungleich	$a \neq b$	f	t	t	f
Maximum	$a \uparrow b$	f	t	t	t
	$\neg(a \uparrow b)$	t	f	f	f
gleich	$a = b$	t	f	f	t
	$\neg b$	t	f	t	f
größer gleich	$a \geq b$	t	f	t	t
	$\neg a$	t	t	f	f
kleiner gleich	$a \leq b$	t	t	f	t
	$\neg(a \downarrow b)$	t	t	t	f
größte Element	t	t	t	t	t

4. Zweistellige Operationen: Informatikbrille

	a	f	f	t	t
	b	f	t	f	t
	f	f	f	f	f
Konjunktion (AND)	$a \mathbin{\&\&} b$	f	f	f	t
	$a \mathbin{\&\&} \mathit{not}\ b$	f	f	t	f
	a	f	f	t	t
	$\mathit{not}\ a \mathbin{\&\&} b$	f	t	f	f
	b	f	t	f	t
Exklusive Disjunktion (XOR)	$a <> b = a \oplus b$	f	t	t	f
Disjunktion (OR)	$a \mid\mid b$	f	t	t	t
Nicht-Disjunktion (NOR)	$\mathit{not}\ (a \mid\mid b)$	t	f	f	f
	$a = b$	t	f	f	t
	$\mathit{not}\ b$	t	f	t	f
	$a \mid\mid \mathit{not}\ b$	t	f	t	t
	$\mathit{not}\ a$	t	t	f	f
	$\mathit{not}\ a \mid\mid b$	t	t	f	t
Nicht-Konjunktion (NAND)	$\mathit{not}\ (a \mathbin{\&\&} b)$	t	t	t	f
	t	t	t	t	t

4. Zweistellige Operationen: Systematik

☞ Bleiben Sie flexibel ...

Systematik:

- beide Argumente werden ignoriert (konstante Funktion): 2 Operationen,
- ein Argument wird ignoriert: 2×2 Operationen,
- kein Argument wird ignoriert: 2×5 Operationen:

positiv	$a \wedge b$	$a \to b$	$a \leftarrow b$	$a \leftrightarrow b$	$a \vee b$
negativ	$\neg(a \wedge b)$	$\neg(a \to b)$	$\neg(a \leftarrow b)$	$\neg(a \leftrightarrow b)$	$\neg(a \vee b)$
positiv	$a \downarrow b$	$a \leq b$	$a \geq b$	$a = b$	$a \uparrow b$
negativ	$\neg(a \downarrow b)$	$a > b$	$a < b$	$a \neq b$	$\neg(a \uparrow b)$

4. Algebraische Eigenschaften: Assoziativität

Die Operation $\otimes$ ist *assoziativ* genau dann, wenn

$$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$$

Warum ist die Eigenschaft von Bedeutung?

- Mathematik: $a \otimes b \otimes c \otimes d$ kann ohne Klammern notiert werden.
- Informatik: beliebige Auswertungsreihenfolge, sequentiell oder parallel.

Quiz:

- „$\swarrow$“ mit $a \swarrow b = a$ ist assoziativ.
- „$\swarrow$“ mit $a \swarrow b = \neg a$ ist nicht assoziativ.
- „$\rightarrow$“ ist nicht assoziativ.
- „$\wedge$“ ist assoziativ.
- „$\leftrightarrow$“ ist assoziativ:

$$(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow c = a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c)$$

4. Algebraische Eigenschaften: Assoziativität

Die Operation $\otimes$ ist *assoziativ* genau dann, wenn

$$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$$

Warum ist die Eigenschaft von Bedeutung?

- Mathematik: $a \otimes b \otimes c \otimes d$ kann ohne Klammern notiert werden.
- Informatik: beliebige Auswertungsreihenfolge, sequentiell oder parallel.

Quiz:

- „$\swarrow$“ mit $a \swarrow b = a$ ist assoziativ.
- „$\swarrow$“ mit $a \swarrow b = \neg a$ ist nicht assoziativ.
- „$\rightarrow$“ ist nicht assoziativ.
- „$\wedge$“ ist assoziativ.
- „$=$“ ist assoziativ:

$$((a = b) = c) = (a = (b = c))$$

4. Anwendung: Paritätsbit

Eine weitere Eigenschaft:

$$(\neg a = b) = \neg(a = b) = (a = \neg b)$$

Wenn ein Bit falsch übertragen wird, ...

$$\begin{array}{ccc}
b_0\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5 & \Longrightarrow & b_0\ b_1\ b_2\ b_3\ \neg b_4\ b_5 \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 & & b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = \neg b_4 = b_5 \\
= & & = \\
b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 & \neq & \neg(b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5)
\end{array}$$

☞ Paritätsbit kann parallel berechnet werden.

☞ Hier ist die assoziative Lesart und *nicht* die konjunktive Lesart gemeint: $a = b = c$ steht *nicht* als Abkürzung für $a = b$ und $b = c$.

4. Algebraische Eigenschaften: neutrales Element

Das Element e ist das *neutrale Element* der Operation $\otimes$ gdw

$$e \otimes a = a = a \otimes e$$

Quiz:

- Das neutrale Element von „$\wedge$“ ist t.
- Das neutrale Element von „$\vee$“ ist f.
- „$\swarrow$“ mit $a \swarrow b = a$ hat kein neutrales Element.
- „$\rightarrow$“ hat kein neutrales Element.
- „$=$“ hat ein neutrales Element, nämlich t.
- „$\neq$“ hat ein neutrales Element, nämlich f.

4. Anwendung: Programmoptimierung

$$
\begin{aligned}
\textbf{\textit{if}}\ e = \mathit{true}\ \textbf{\textit{then}}\ e_1\ \textbf{\textit{else}}\ e_2 &\quad = \quad \textbf{\textit{if}}\ e\ \textbf{\textit{then}}\ e_1\ \textbf{\textit{else}}\ e_2 \\
\textbf{\textit{if}}\ (e = \mathit{true}) = \mathit{true}\ \textbf{\textit{then}}\ e_1\ \textbf{\textit{else}}\ e_2 &\quad = \quad \textbf{\textit{if}}\ e\ \textbf{\textit{then}}\ e_1\ \textbf{\textit{else}}\ e_2 \\
\textbf{\textit{if}}\ e <> \mathit{false}\ \textbf{\textit{then}}\ e_1\ \textbf{\textit{else}}\ e_2 &\quad = \quad \textbf{\textit{if}}\ e\ \textbf{\textit{then}}\ e_1\ \textbf{\textit{else}}\ e_2 \\
\textbf{\textit{if}}\ \mathit{not}\ e\ \textbf{\textit{then}}\ e_1\ \textbf{\textit{else}}\ e_2 &\quad = \quad \textbf{\textit{if}}\ e\ \textbf{\textit{then}}\ e_2\ \textbf{\textit{else}}\ e_1 \\
\textbf{\textit{if}}\ \mathit{false} <> \mathit{not}\ e\ \textbf{\textit{then}}\ e_1\ \textbf{\textit{else}}\ e_2 &\quad = \quad \textbf{\textit{if}}\ e\ \textbf{\textit{then}}\ e_2\ \textbf{\textit{else}}\ e_1
\end{aligned}
$$

4. Ordnungstheoretische Eigenschaften

Die Funktion f ist monoton (ordnungserhaltend) genau dann, wenn

$$x \leq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y)$$

Die Funktion g ist antiton (ordnungsumkehrend) genau dann, wenn

$$x \geq y \quad \Rightarrow \quad g(x) \leq g(y)$$

- Die Negation ist antiton.
- Konjunktion und Disjunktion sind monoton in beiden Argumenten.
- Die Implikation ist antiton im 1. und monoton im 2. Argument:

$$a \geq a' \;\wedge\; b \leq b' \quad \Rightarrow \quad (a \rightarrow b) \leq (a' \rightarrow b')$$

Quiz: Welche Operationen sind weder monoton noch antiton?

4. Ordnungstheoretische Eigenschaften

Die Funktion f ist monoton (ordnungserhaltend) genau dann, wenn

$$x \leq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y)$$

Die Funktion g ist antiton (ordnungsumkehrend) genau dann, wenn

$$x \geq y \quad \Rightarrow \quad g(x) \leq g(y)$$

- Die Negation ist antiton.
- Konjunktion und Disjunktion sind monoton in beiden Argumenten.
- Die Implikation ist antiton im 1. und monoton im 2. Argument:

$$a \geq a' \;\wedge\; b \leq b' \quad \Rightarrow \quad (a \leq b) \leq (a' \leq b')$$

Quiz: Welche Operationen sind weder monoton noch antiton?