

# Teil VIII

## Algorithmik II

## 16. Rechnen mit Braun Bäumen — Fortsetzung

```

type Tree <'elem>
  | Leaf
  | Node of 'elem * Tree <'elem> * Tree <'elem>

let rec size = function
  | Leaf          → 0
  | Node (_, l, r) → 1 + size l + size r

```

*Invariante:* für jeden Knoten  $Node(a, l, r)$  gilt, dass der linke Teilbaum  $l$  genau so viele Elemente wie der rechte Teilbaum  $r$  enthält oder ein Element mehr.

$$0 \leq size\ l - size\ r \leq 1$$

☞ Die Struktur eines Braun Baums ist durch die Anzahl der Elemente eindeutig festgelegt.

## 16. Größe eines Braun Baums

Wie schnell können wir die Größe eines Braun Baums bestimmen? Die Funktion *size* benötigt lineare Laufzeit. *Surely, we can do better!*

*Idee:* Invariante ausnutzen.

```
let rec size = function  
  | Leaf           → 0  
  | Node (_, l, r) → let n = size r  
                    in 1 + 2 * n + (0 oder 1)
```

☞ Wie können wir rausbekommen, ob der linke Teilbaum größer ist?

## 16. Größe eines Braun Baums

*Idee:* Wir versuchen auf das  $(n + 1)$ -te Element zuzugreifen (an Position  $n$ , da Nummerierung ab 0):

```
let rec size = function
| Leaf           → 0
| Node (_, l, r) → let n = size r
                    in 1 + 2 * n + (match nth (l, n) with
                                | None   → 0
                                | Some _ → 1)
```

Gelingt der Zugriff, dann ist der linke Teilbaum größer; schlägt der Zugriff fehl, dann sind beide Teilbäume gleich groß.

*Laufzeit:* logarithmisch viele Zugriffe, jeder Zugriff hat logarithmische Laufzeit, also  $(\lg n)^2$ .

## 16. Konstruktion von Braun Bäumen

Wie schnell können wir einen Braun Baum konstruieren?

*Gesucht:* Umkehrfunktion von *to-list*.

$$\text{to-list} \ll \text{from-list} = \text{id}$$
$$\text{from-list} \ll \text{to-list} = \text{id}$$

☞ Da die Struktur eines Braun Baums durch die Anzahl der Elemente eindeutig festgelegt ist, hat *to-list* tatsächlich eine Inverse.

## 16. Konstruktion: Möglichkeit 1

Wir verwenden das *Struktur Entwurfsmuster* für Listen und fügen nacheinander die Listenelemente mit *cons* in einen anfangs leeren Braun Baum ein.

**let rec from-list = function**

| [] → *Leaf*

|  $x :: xs$  → *cons*  $x$  (*from-list*  $xs$ )

*Laufzeit:* *cons* hat eine logarithmische Laufzeit; somit ist die Gesamtlaufzeit linear-logarithmisch,  $n \lg n$ .

## 16. Konstruktion: Möglichkeit 2

Wir verwenden das *allgemeine Leibniz Entwurfsmuster* für Listen und kehren *to-list* um: aus *zip* wird *unzip* ...

**let rec to-list = function**

| Leaf → []  
| Node (x, l, r) → x :: zip (to-list l, to-list r)

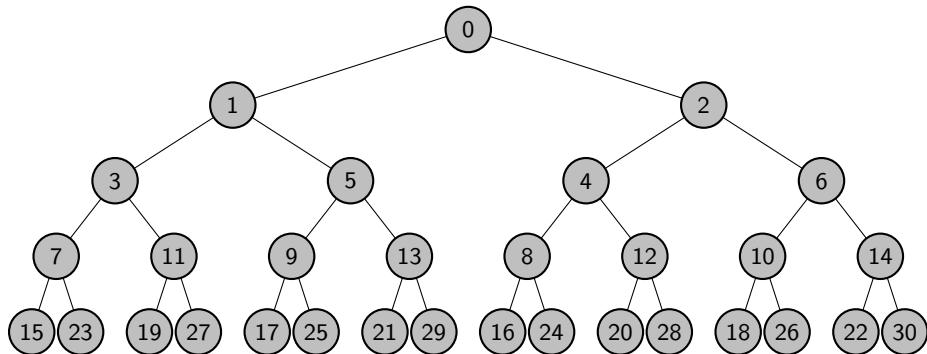
**let rec from-list = function**

| [] → Leaf  
| x :: xs → **let** (xs<sub>1</sub>, xs<sub>2</sub>) = unzip xs  
Node (x, from-list xs<sub>1</sub>, from-list xs<sub>2</sub>)

*Laufzeit*: lineare Laufzeit pro Rekursionsebene; logarithmische Rekursionstiefe; somit ist die Gesamtlaufzeit linear-logarithmisch,  $n \lg n$ .

## 16. Konstruktion: Möglichkeit 3

*Idee:* wir konstruieren den Baum ebenenweise von unten nach oben („bottom-up“ statt „top-down“). Laufendes Beispiel: *from-list* [0..30].





## 16. Konstruktion: Möglichkeit 3

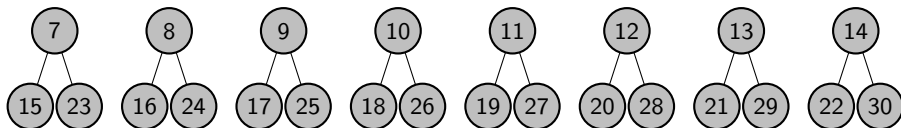
Erster Schritt: Wir teilen die Listenelemente ebenenweise auf.

```
      0
     1 2
    3 4 5 6
   7 8 9 10 11 12 13 14
 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
```

 Die Anzahl der Elemente verdoppelt sich von einer Ebene zur nächsten.

## 16. Konstruktion: Möglichkeit 3

Konstruktion der zweituntersten Ebene:

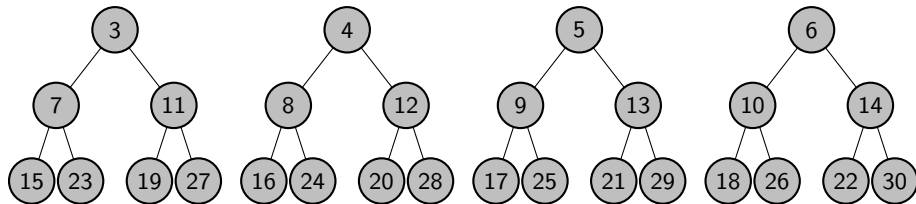


☞ Wurzeln der linken Teilbäume: 15...22; Wurzeln der rechten Teilbäume: 23...30.

15 16 17 18 19 20 21 22 || 23 24 25 26 27 28 29 30

## 16. Konstruktion: Möglichkeit 3

Konstruktion der drittuntersten Ebene:

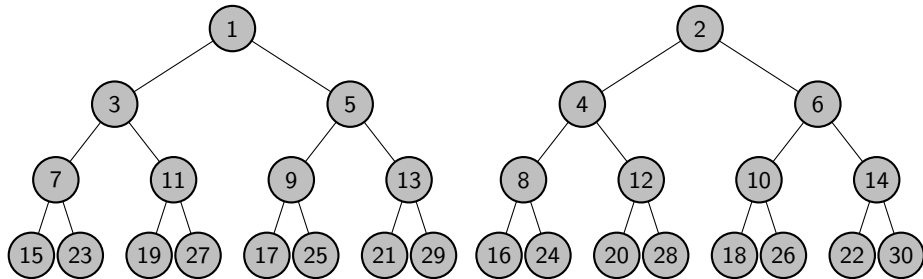


☞ Wurzeln der linken Teilbäume: 7 ... 10; Wurzeln der rechten Teilbäume: 11 ... 14.

7 8 9 10 || 11 12 13 14

## 16. Konstruktion: Möglichkeit 3

Konstruktion der viertuntersten Ebene:



☞ Wurzeln der linken Teilbäume: 3...4; Wurzeln der rechten Teilbäume: 5...6.

3 4 || 5 6

## 16. Konstruktion: Möglichkeit 3

Die Funktion *build k* überführt eine Liste von Elementen in eine Liste von *k* Braun Bäumen.

```

let single a = Node (a, Leaf, Leaf)
// val build : Nat → 'a list → (Tree ⟨'a⟩) list
let rec build k list =
  if k ≥ length list
  then map single list @ [ for i in 1 .. k - length list → Leaf ]
  else let (xs, rest) = split-at k list
         let (ls, rs) = split-at k (build (2 * k) rest)
         map3 (fun x l r → Node (x, l, r)) xs ls rs
let from-list list = head (build 1 list)
  
```

☞ Sind nicht genügend Elemente für die unterste Ebene vorhanden, füllen wir mit  $k - \text{length list}$  Blättern auf. (Was machen *map* und *map3*?)

*Laufzeit*: pro Ebene proportional zur Anzahl der Knoten; somit insgesamt linear!

## 16. Konstruktion: „top-down“ versus „bottom-up“

	top-down	bottom-up
Aufteilung	Liste von Elementen <i>unzip</i>	Liste von Teilbäumen <i>halve</i>