Prof. Dr. Ralf Hinze
Cass Alexandru, M.Sc.
Alexander Dinges, M.Sc.
Felix Winkler, M.Sc.

RPTU
Fachbereich Informatik
AG Programmiersprachen

Lösungshinweise/-vorschläge zum Übungsblatt 1: Konzepte der Programmierung (WS 2026/27)

Hinweis zur KI-Nutzung: Die Verwendung von KI zur Lösung der Übungsaufgaben ist nicht gestattet (siehe auch Vorlesungsfolie 14). Übungsabgaben, für die KI verwendet wurde, werden insgesamt mit 0 Punkten bewertet.

Hinweis zur Bearbeitung und Abgabe: Die Abgabe erfolgt über das ExClaim System.

Dieses Übungsblatt enthält noch keine Programmieraufgaben. Sie können die Aufgaben daher alle handschriftlich lösen und die Lösung dann fotografieren/scannen. Laden Sie die Datei (bitte im PDF-Format) dann im ExClaim System bei der jeweiligen Aufgabe hoch. Alternativ zur handschriftlichen Bearbeitung können Sie die Lösung auch z.B. in LaTeX erstellen.

Aufgabe 1 Boolesche Ausdrücke und Werte (ohne Einreichung)

Hinweis: Schauen Sie sich diese Aufgabe bis zur ersten Übungsstunde an. Diese wird dann dort diskutiert. Sie haben nichts abzugeben.

Motivation: Sie sollen sich den Unterschied zwischen Syntax und Semantik bewusst machen.

In der Vorlesung haben Sie Boolesche Ausdrücke kennengelernt. Beantworten Sie dazu:

a) Wie viele Boolesche Ausdrücke gibt es?

> Es gibt unendlich viele Boolesche Ausdrücke, zum Beispiel `(n < n+1)` mit $n \in \mathbb{N}$.

b) Wie viele Boolesche Werte gibt es?

> Es gibt zwei Boolesche Werte. Die Booleschen Ausdrücke **`true`** und **`false`** werten zu den Wahrheitswerten *true* und *false* aus.

Aufgabe 2 Semantik von Binärzahlen (Einreichaufgabe, 11 Punkte)

Motivation: In dieser Aufgabe sollen Sie Baumsprachen und Beweissysteme anhand eines kleinen Beispiels einüben, bevor Sie sich mit der umfangreicheren Semantik von Mini-F# auseinandersetzen. Sie können sich an den Vorlesungsfolien 71 bis 90 sowie am Skript Kapitel 2.3 und 2.4 orientieren.

Die folgende Baumsprache modelliert Binärzahlen:

$$\begin{aligned} d \in \mathit{Digit} &::= \mathit{one} \mid \mathit{two} \\ ds \in \mathit{Numeral} &::= \mathit{nil} \mid \mathit{cons}(\mathit{Digit}, \mathit{Numeral}) \end{aligned}$$

Wir stellen Binärzahlen so dar, dass die niederwertigste Ziffer links steht. Die Zahl

$$\begin{aligned} 34 &= 2 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 \\ &= 2 + 2 \cdot \Big(2 + 2 \cdot \Big(1 + 2 \cdot \big(1 + 2 \cdot (1 + 2 \cdot 0)\big)\Big)\Big) \end{aligned}$$

wird zum Beispiel durch den Baum

$$\mathit{cons}(\mathit{two}, \mathit{cons}(\mathit{two}, \mathit{cons}(\mathit{one}, \mathit{cons}(\mathit{one}, \mathit{cons}(\mathit{one}, \mathit{nil})))))$$

repräsentiert. Formal wird dies durch die folgenden Regelschemata ausgedrückt, wobei $(ds \Downarrow n)$ bedeutet, dass dem Numeral ds die natürliche Zahl n zugeordnet wird.

Beispiel: $\mathit{cons}(\mathit{two}, \mathit{cons}(\mathit{two}, \mathit{cons}(\mathit{one}, \mathit{cons}(\mathit{one}, \mathit{cons}(\mathit{one}, \mathit{nil}))))) \Downarrow 34$

Die Semantik von einzelnen Ziffern beschreiben wir mit folgenden Regeln:

$$\frac{}{\mathit{one} \Downarrow 1} \qquad \frac{}{\mathit{two} \Downarrow 2}$$

Die Semantik für Numerale legen wir mit einer Regel für *nil* und einer Regel für *cons* wie folgt fest:

$$\frac{}{\mathit{nil} \Downarrow 0} \qquad \frac{d \Downarrow n_1 \qquad ds \Downarrow n_2}{\mathit{cons}(d, ds) \Downarrow n_1 + 2 \cdot n_2}$$

a) Geben Sie die Werte an, zu denen die folgenden Numerale auswerten und geben Sie jeweils einen vollständigen Beweisbaum an:

- nil

$$\frac{}{\mathit{nil} \Downarrow 0}$$

- $\mathit{cons}(\mathit{one}, \mathit{cons}(\mathit{two}, \mathit{nil}))$

$$\frac{\dfrac{}{\mathit{one} \Downarrow 1} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\mathit{two} \Downarrow 2} \qquad \dfrac{}{\mathit{nil} \Downarrow 0}}{\mathit{cons}(\mathit{two}, \mathit{nil}) \Downarrow 2}}{\mathit{cons}(\mathit{one}, \mathit{cons}(\mathit{two}, \mathit{nil})) \Downarrow 5}$$

- $\mathit{cons}(\mathit{two}, \mathit{cons}(\mathit{two}, \mathit{cons}(\mathit{two}, \mathit{nil})))$

$$\frac{\dfrac{}{\mathit{two} \Downarrow 2} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\mathit{two} \Downarrow 2} \qquad \dfrac{}{\mathit{nil} \Downarrow 0}}{\mathit{cons}(\mathit{two}, \mathit{nil}) \Downarrow 2}}{\mathit{cons}(\mathit{two}, \mathit{cons}(\mathit{two}, \mathit{nil})) \Downarrow 6}}{\mathit{cons}(\mathit{two}, \mathit{cons}(\mathit{two}, \mathit{cons}(\mathit{two}, \mathit{nil}))) \Downarrow 14}$$

b) Welches Problem würde auftreten, wenn man Regeln erstellen würde, so dass die Wertigkeit der Ziffern von links nach rechts abnehmen würde, 34 also durch

$$cons(one, cons(one, cons(one, cons(two, cons(two, nil)))))$$

repräsentiert würde? Warum ließen sich keine analogen Regelschemata aufstellen wie in Teilaufgabe a)?

Man braucht einen Zähler, der zählt, wie oft *cons* geschachtelt ist, um einen adäquaten Faktor zu erhalten.

c) *Optionale Knobelaufgabe:* Überlegen Sie sich Regelschemata für diesen schwierigeren Fall.

Wir erweitern die Sprache für die Aussagen, die wir verwenden können um eine Aussage über die Länge einer Zahl:

$$\begin{aligned} a \in Aussage ::= \; & ds \Downarrow \mathbb{N} \\ \mid \; & d \Downarrow \mathbb{N} \\ \mid \; & len(ds) \Downarrow \mathbb{N} \end{aligned}$$

Die Länge lässt sich dann mit den folgenden beiden Regeln beschreiben:

$$\frac{}{len\ (nil) \Downarrow 0} \qquad \frac{len(ds) \Downarrow n}{len(cons(d, ds)) \Downarrow n + 1}$$

Mit Hilfe der Länge kann dann der Wert in der Regel berechnet werden:

$$\frac{}{nil \Downarrow 0} \qquad \frac{len(ds) \Downarrow n \qquad d \Downarrow n_1 \qquad ds \Downarrow n_2}{cons(d, ds) \Downarrow 2^n \cdot n_1 + n_2}$$

Aufgabe 3 Endliche Abbildungen (Einreichaufgabe, 6 Punkte)

Motivation: In dieser Aufgabe beschäftigen Sie sich mit endlichen Abbildungen. Diese mathematische Grundlage benötigen wir später für die Semantik von Wertedefinitionen (ab Folie 130 / Skript Kapitel 3.3). Sie können sich für diese Aufgabe an den Vorlesungsfolien 55 bis 62 sowie am Skript Kapitel 2.1 orientieren.

Die folgenden endlichen Abbildungen geben Farben von einigen Dingen an:

$\phi_1 = \{Wolke \mapsto weiß, Banane \mapsto gelb, Apfel \mapsto grün\}$

$\phi_2 = \{Himmel \mapsto blau, Wolke \mapsto grau, Apfel \mapsto rot\}$

Welche endlichen Abbildungen ergeben die folgenden Ausdrücke?

a) ϕ_1, ϕ_1

ϕ_1

b) ϕ_1, ϕ_2

$\{Wolke \mapsto grau, Himmel \mapsto blau, Apfel \mapsto rot\}$
$\cup \{Banane \mapsto gelb\}$

c) $\phi_1, \{Apfel \mapsto gelb\}, \phi_2$

$\{Wolke \mapsto grau, Himmel \mapsto blau, Apfel \mapsto rot\}$
$\cup \{Banane \mapsto gelb\}$

d) $\phi_1 - \{Wolke, Himmel\}$

$\{Banane \mapsto gelb, Apfel \mapsto grün\}$

e) $(\phi_2, \phi_1) - \{Wolke, Himmel\}$

$\{Banane \mapsto gelb, Apfel \mapsto grün\}$

f) $\phi_2, (\phi_1 - \{Wolke, Himmel\})$

$\{Banane \mapsto gelb, Apfel \mapsto grün\}$
$\cup \{Wolke \mapsto grau, Himmel \mapsto blau\}$